数理解析研究所講究録
491巻 1983年 14-24

Optimal stoppingの問題について

愛媛大・教養 森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

§1。 Stochastic control の一般論では取扱えない，一つの問題として optimal stopping の問題がある。(x_t)を (1) diffusion process 又は (2) point process とするとき，利得 $J(T) = E[a(x_T) + \int_0^T b(s, x_s)\,ds]$ (T : stopping time) を最大にすることである。(1)の場合，[1]，[2]，[5]等で論じられている。ここでは(2)の場合を含めて，マルチンゲール理論を適用する立場から論ずる。もっと一般的な問題の formulation をしよう。

Formulation $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を complete な確率空間，$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を $\mathcal{F}$ の sub-σ-fields の増加列で通常の条件をみたすとする。(X_t) を与えられた右連続，adapted process で $E[\sup_t X_t^+] < \infty$，$E[X_t^-] < \infty$ $\forall t \geq 0$，をみたすとする。以後 $X_\infty = \limsup_{t\to\infty} X_t$ とみなす。

$\overline{C} = \{T ;$ stopping time, $E[X_T^-] < \infty\}$,

$C = \{T \in \overline{C} :$ finite$\}$ とおく。

利得を $J(T) = E[X_T]$ で定義するとき C 又は $\overline{C}$ の中で利得を最大にせよ。

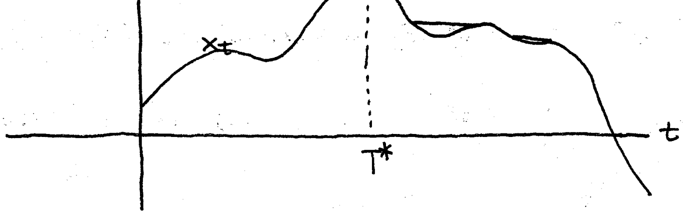
この問題の起源は Wald の Sequential Analysis (1947) にあり，Snell (1952) は (X_t) のかわりに r.v. の列 $(X_n)_{n=1,2,\cdots}$ の場合に解決した。その考え方を deterministic な場合に述べよう。すべての t で $\mathcal{F}_t$ は trivial とすると (X_t) は t のみの通常の一変数関数となる，更に，$t \to X_t$ は連続としよう。$Y_t = \sup_{s \ge t} X_s$ とおくと，Y_t は次の性質をもつ：

(1) $t \to Y_t$: 連続，減少関数，

(2) $X_t \le Y_t$, $\forall t \ge 0$,

(3) $Y_0 = \sup_t X_t$.

$T^* = \inf\{t \mid X_t = Y_t\}$ とおくと，これが求めるもの，optimal stopping time である。更に $X_t \to -\infty$ $(t \to \infty)$ のときには $T^* < \infty$。事情を図式にすると次の様になる。



これを random 化しようとするのが Snell の考えである。 即ち次の定理が成立する。

定理1。 次の性質をもつ右連続 supermartingale (Y_t) が存在する：

(1) $X_t \leqq Y_t, \quad \forall t \geqq 0,$

(2) $Y_t = \underset{T \in \overline{C},\, T \geqq t}{\mathrm{ess\,sup}}\ E[X_T \mid \mathcal{F}_t],$

(3) $\limsup_{t \to \infty} Y_t = \limsup_{t \to \infty} X_t,$

(4) $E[Y_0] = \sup_{T \in \overline{C}} E[X_T] = \sup_{T \in C} E[X_T].$

証明の概略。 先ず，クラス $\{E[X_\nu \mid \mathcal{F}_t] : \nu \in \overline{C}, \nu \geqq t\}$ は "sup" operation で閉じていることが基本的である。これより，(2) の右辺を Y'_t とおくと，stopping time の列 $T_n \in \overline{C}, T_n \geqq t$ で $Y'_t = \lim_n \uparrow E[X_{T_n} \mid \mathcal{F}_t]$ なるものがとれる。 従って，

$$E[Y'_t \mid \mathcal{F}_s] = \lim_n E[E[X_{T_n} \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \lim_n E[X_{T_n} \mid \mathcal{F}_s] \leqq Y'_s, \quad t \geqq s,$$

即ち，(Y'_t) は supermartingale である。
更に (Y'_t) は右連続 modification (Y_t) をもつことが示される。 (1) は明らか。 (3), (4) は time discrete の場合と同じ様にして出る。

この (Y_t) は Snell envelope と呼ばれている。 Optimal stopping time の存在定理として次の定理2, 3 が知られている。

定理2。 (X_t) は次の性質をもつとする：

$$T_n \in C \uparrow T \quad \Rightarrow \quad \limsup X_{T_n} \leq X_T \quad \text{on} \quad \{T < \infty\}.$$

このとき，

$$T^* = \inf\{t \mid X_t = Y_t\} \quad : \text{optimal in } \overline{C}.$$

更に， $\lim_{t \to \infty} X_t = -\infty$ ならば $T^* < \infty$ かつ optimal in C.

定理3。 (X_t) は次の性質をもつとする：

(i) $E[\sup_t |X_t|] < \infty$,

(ii) $T_n \uparrow T$ in $\overline{C} \quad \Rightarrow \quad E[X_{T_n}] \rightarrow E[X_T]$.

このとき，

$$T^* = \inf\{t \mid X_t = Y_t\} \quad : \text{optimal in } \overline{C}.$$

そして Snell envelope (Y_t) も (ii) の性質をもつ。

更に， S を stopping time とするとき，

$$D(S) = \inf\{t \mid t \geq S,\ X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \overline{C},$$

i.e., $\quad E[X_{D(S)}] = \sup_{T \geq S} E[X_T]$.

定理2 は Fakeev (1970), Thompson (1971), 定理3 は Bismut-

Skalli (1977) による。 尚これらの定理で左からの連続性がおとせない事は容易にわかる。

定理4。 $T \in \overline{\mathcal{C}}$ とするとき，T が optimal であるための必要十分条件は $X_T = Y_T$ かつ $(Y_{t\wedge T})$: martingale となることである。

Penalty method コンピュータ的視点より Snell envelope を求める事，近似法が問題となる。 [1] は変分不等式，[2] は semi-group を用いて，1つの近似法，いわゆる penalty method を論じている。 ここではマルチンゲールによる取扱いを述べる。 先ず Banach space W を次の様に定義する：

$$W = \{ x = (x_t) : \text{右連続, adapted process}, \ \|x\| = \| \sup_t |x_t| \|_{L^\infty} < \infty \}.$$

以後，X_t は次の形

$$X_t = e^{-\alpha t} f_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds \qquad (f, g \in W, \ \alpha > 0)$$

の場合のみを考える。 (X_t) の Snell envelope (Y_t) は

$$Y_t = e^{-\alpha t} z_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds$$

となる。 ここで (z_t) は右連続，adapted process で

$$z_t = \operatorname*{ess\,sup}_{T \geq t} E\left[e^{-\alpha(T-t)} f_T + \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} g_s \, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right].$$

問題は (z_t) を何かで近似せよという事になる。

問題解決の Key point は，V を W の subclass で

$$V = \{ x = (x_t) \in W :$$

$$(\mathrm{i}) \quad f_t \leqq x_t, \quad \forall t \geqq 0,$$

$$(\mathrm{ii}) \quad (e^{-\alpha t} x_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds) : \text{supermartingale} \}$$

とすると，(z_t) は V の元で，かつ minimal, i.e.,

$\forall x \in V$ に対して $x \geqq z$ になっていることである。

実際，(i),(ii) は容易に check できる。又 Doob の任意

抽出定理より，$T \geqq t$ に対して，

$$E[e^{-\alpha T} x_T + \int_0^T e^{-\alpha s} g_s \, ds \mid \mathcal{F}_t] \leqq e^{-\alpha t} x_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds .$$

故に，(i) を考慮して，

$$E[e^{-\alpha (T-t)} f_T + \int_t^T e^{-\alpha (s-t)} g_s \, ds \mid \mathcal{F}_t] \leqq x_t .$$

結局 $x \geqq z$ を得る。

次に non-Markovian の場合に通用する generator A を導入しよう。各 $x \in W$，各 $\beta > 0$ に対して

$$G_\beta x(t) = E[\int_t^\infty e^{-\beta (s-t)} x_s \, ds \mid \mathcal{F}_t]$$

とおくと，$G_\beta : W \to W$ であり 1 対 1，resolvent equation $G_\beta - G_\gamma + (\beta - \gamma) G_\beta G_\gamma = 0$ $(\beta, \gamma > 0)$ を満すことが示せる。そこで $A : \mathcal{D}(A) \to W$ を

$$A = \beta - G_\beta^{-1}, \qquad \mathcal{D}(A) = G_\beta(W) \qquad (\beta \text{ に depend しない})$$

と定義する。deterministic な場合 $A = d^+/dt$ であることが簡単な計算より示せる。

マルチンゲールとの関係では

$$\begin{cases} Ax = 0 \iff x \in W : \text{martingale} \\ Ax \leqq 0,\ x \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow x : \text{supermartingale} \end{cases}$$

が成立する。

定理5。 Penalty equation

$$(\alpha - A) z^{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}(f - z^{\varepsilon})^{+} = g, \quad (\varepsilon > 0)$$

は unique solution $z^{\varepsilon} \in \mathcal{D}(A)$ をもち，各 t に対して

$$z^{\varepsilon}(t) \to z(t) \quad \text{a.s.} \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

証明の概略。 作用素 $T_{\varepsilon} : W \to W$ を

$$T_{\varepsilon} x(t) = E\left[\int_t^{\infty} e^{-(\alpha + \frac{1}{\varepsilon})(s-t)} \left(g_s + \frac{1}{\varepsilon} f \vee x(s)\right) ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right], \quad x \in W,$$

によって定義すると，T_{ε} は縮小写像となり，不動点 $z^{\varepsilon} \in W$ をもつ。 そして $z^{\varepsilon}(t) = G_{\alpha}(g + \frac{1}{\varepsilon}(f - z^{\varepsilon})^{+})$ とかける。 これが penalty equation の解である。 更に，

$$A\left(e^{-\alpha t} z^{\varepsilon}(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds\right) = -e^{-\alpha t} \frac{1}{\varepsilon}(f - z^{\varepsilon})^{+}(t) \leqq 0$$

により $\left(e^{-\alpha t} z^{\varepsilon}(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s \, ds\right)$ は supermartingale となる。

一方，

$$\begin{cases} z^{\varepsilon}(t) \leqq z^{\varepsilon'}(t) & (\varepsilon' < \varepsilon) \\ z^{\varepsilon}(t) \leqq z(t), \end{cases}$$

が成立し，$z^{*}(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} z^{\varepsilon}(t)$ とおくと $z^{*} \in V$ がわかり minimality より $z = z^{*}$ となる。

§2。 Optimal stopping の応用や複雑化された optimal stopping の問題として有名なものがいくつかあるが，ここでは直列型の optimal switching の問題を述べよう。

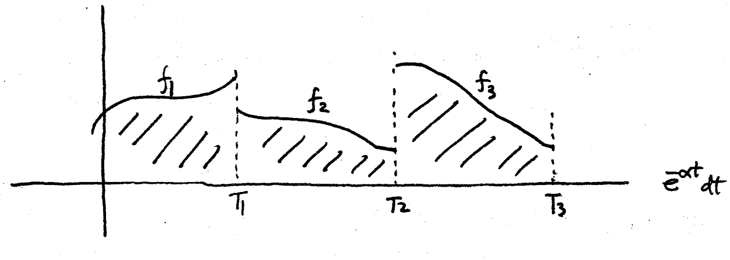
先ず次の様な model を考えよう。 N ケの diffusion process x_i $(i=1,2,\cdots,N)$ が与えられたとき，x_1 を start し，時刻 T_i で x_i から x_{i+1} に switch する process を $x_{\hat{T}}$ とする

即ち，
$$x_{\hat{T}}(t) = \begin{cases} x_i(t) & \text{if} \quad T_{i-1} \leqq t < T_i \\ 0 & \text{if} \quad t \geqq T_N \end{cases}.$$

このとき，利得 $J(\hat{T}) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha s} c(x_{\hat{T}}(s))\,ds] \cong \sum_i E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} c(x_i(s))\,ds]$，$(\hat{T} = (T_1, T_2, \cdots, T_N))$ を最大にせよ。

一般的な formulation $\mathcal{C} = \{\hat{T} = (T_1, T_2, \cdots, T_N) \mid 0 = T_0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \cdots \leqq T_N$ stopping time$\}$ とする。 与えられた $f_i \in W$ $(i=1,2,\cdots,N)$ に対して利得 $J(\hat{T}) = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds]$ $(\hat{T} \in \mathcal{C})$ を最大にせよ。 特に，$N=1$ のときは optimal stopping の問題となっている。

$N=3$, deterministic な場合は下図の斜線の部分の面積を最大にするように T_1, T_2, T_3 を選ぶことになる。



Snell envelope を一般化して，定理 1 に対応する次の定理が成立する。

定理 6。 次の性質をみたす $Z_i \in W$ $(i=1,2,\cdots,N)$ が存在する：

(1) $Z_1 \geqq Z_2 \geqq \cdots \geqq Z_N \geqq Z_{N+1} \equiv 0$,

(2) 任意の stopping time S に対して,

$$Z_i(S) = \operatorname*{ess\,sup}_{\hat{T} \in C_i(S)} E\Big[\sum_{j=i}^{N} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-\alpha(t-S)} f_j(t)\,dt \,\Big|\, \mathcal{F}_S\Big], \quad i=1,2,\cdots,N,$$

ここで $C_i(S) = \{\hat{T} = (T_1,\cdots,T_N) \mid S = T_{i-1} \leqq \cdots \leqq T_N$, stopping times$\}$,

(3) $\left(e^{-\alpha t} Z_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds\right)$: supermartingale $\forall i$,

(4) $E[Z_1(0)] = \sup_{\hat{T} \in \mathcal{C}} J(\hat{T})$,

(5) $$e^{-\alpha t} Z_i(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{T \geqq t} E\Big[\int_t^T e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds + e^{-\alpha T} Z_{i+1}(T) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big].$$

(5) だけは定理 1 のものに対応してない。 i について Bellman principle が成立することを示しており基本的な役割をする。

定理 7。 $T_0^* = 0$, $T_i^* = \inf\{t \geqq T_{i-1}^* \mid Z_i(t) = Z_{i+1}(t)\}$ とおくと $\hat{T}^* = (T_1^*, T_2^*, \cdots, T_N^*) \in \mathcal{C}$ は optimal である。

証明の概略。 各 i に対して定理 6 (5) より

$(e^{-\alpha t} z_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds)$ は $(e^{-\alpha t} z_{i+1}(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds)$ の Snell envelope である。 これらはすべて定理3(ii)の性質をもつことが帰納法でわかる。 定理6(5)と定理3により,

$$E[z_1(0)] = E[\operatorname*{ess\,sup}_{T \geq 0} E[\int_0^T e^{-\alpha s} f_1(s)\,ds + e^{-\alpha T} z_2(T) \mid \mathcal{F}_0]]$$
$$= \sup_{T \geq 0} E[\int_0^T e^{-\alpha s} f_1(s)\,ds + e^{-\alpha T} z_2(T)]$$
$$= E[\int_0^{T_1^*} e^{-\alpha s} f_1(s)\,ds + e^{-\alpha T_1^*} z_2(T_1^*)] .$$

更に, 定理6(5)により,

$$e^{-\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*) = \operatorname*{ess\,sup}_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds + e^{-\alpha T} z_{i+1}(T) \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}^*}]$$

が示せるので

$$E[e^{-\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*)] = \sup_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds + e^{-\alpha T} z_{i+1}(T)]$$

となる。 再び定理3より右辺は $E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds + e^{-\alpha T_i^*} z_{i+1}(T_i^*)]$ に等しい。 結局, $E[z_1(0)] = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds]$ を得て定理6(4)により証明は終る。

最適性の条件は長くなるので省略する。 最後に penalization を考えよう。

$\mathcal{U}$ を N ケの process の組の class :

$$\mathcal{U} = \{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \mid x_i \in W \quad (i=1,2,\cdots,N),$$

$$\text{(i)} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots\cdots \geq x_N \geq x_{N+1} \equiv 0 ,$$

$$\text{(ii)} \quad (e^{-\alpha t} x_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha s} f_i(s)\,ds) : \text{supermartingale } \forall i \}$$

としよう。 N ケの組 $(z_1, z_2, \cdots, z_N)$ は $\mathcal{U}$ の元であっ

て，かつ minimal i.e., $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mho \Rightarrow x_i \geqq z_i, \forall i$,
であることがわかる。 i についての帰納法と定理5の方法によって次の定理が成立する。

定理8。 Penalty equation

$$(\alpha - A) z_i^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}(z_{i+1}^\varepsilon - z_i^\varepsilon)^+ = f_i, \qquad z_{N+1}^\varepsilon \equiv 0$$

の solution $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, \cdots, z_N^\varepsilon)$ が unique に存在して，各 $t \geqq 0$，各 i に対して

$$z_i^\varepsilon(t) \longrightarrow z_i(t) \qquad \text{a.s.} \qquad (\varepsilon \downarrow 0).$$

参考文献

[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations variationelles en contrôl stochastique, 1978.

[2] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis methods, 1982.

[3] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 34, (1982), 407–416.

[4] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 35, (1983), 119–128.

[5] A. N. Shiryayev, Optimal stopping rules, 1978.